代数幾何学シンポジウム記録
2003年度 pp.109-119


# ASSOCIATOR AND DOUBLE SHUFFLE RELATION

寺杣 友秀

## 1. Introduction

$n$ を自然数とし、$k_1,\dots,k_n$ を 1 以上の整数で $k_n$ のみ 2 以上であるとする。このとき index $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_n)$ の多重ゼータ値を

$$\zeta(\mathbf{k})=\zeta(k_1,\dots,k_n)=\sum_{0<m_1<\dots<m_n}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}}$$

によって定義する。これはまた反復積分表示を使うと、

$$\zeta(k_1,\dots,k_n)=\int_0^1\overbrace{\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt}{t}}^{k_n-1}\frac{dt}{1-t}\cdot\overbrace{\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt}{t}}^{k_{n-1}-1}\frac{dt}{1-t}\cdots\overbrace{\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt}{t}}^{k_1-1}\frac{dt}{1-t}$$

と表される。ここで反復積分は、1 form $\omega_1,\dots,\omega_n$ に対して

$$\int_a^b\omega_1\omega_2\cdots\omega_n=\int_a^b\{\omega_1(x)\int_a^x\omega_2\cdots\omega_n\}$$

により inductive に定義される。また index $\mathbf{k}$ の weight を $\sum_i k_i$ によって定義し、多重ゼータ値の index の weight を単に多重ゼータ値の weight という。index の異なる多重ゼータ値の間に成り立つ relation は数多く知られている。ここで注目したいのはそのなかの一つである、associator relation といわれる関係式のシステムと (relgularized) double shuffle relation といわれるシステムである。主結果は associator relation は relularized double shuffle relation を導くというもので、これは Deligne 氏との共同研究の成果である。

この結果に関する detail を述べる前に、多重ゼータ値の関係式の全体のなかでの、これらの関係式の位置付けを述べておこう。Associator relation も double shuffle relation もその一部分として iterated integral の shuffle relation を含んでいる。この関係式によれば、weight がそれぞれ $p$ と $q$ の二つの多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ と $\zeta(\mathbf{l})$ の積が weight が $p+q$ の多重ゼータ値の $\mathbf{Q}$-線型結合で書かれることがわかる。従って多重ゼータ値の $\mathbf{Q}$-線型結合は $\mathbf{Q}$-代数となる。この代数を $A$ と書く。weight $k$ の多重ゼータ値全体で生成される部分空間 $A_k$ は有限次元となる。

**Conjecture 1.1** (Zagier). (1) 異なる *weight* $k_1,k_2$ に対して、$A_{k_1}$ と $A_{k_2}$ は線型独立。

(2) $\dim A_k = d_k$ とすると

$$\sum d_k t^k = \frac{1}{1-t^2-t^3}.$$

実際 (2) の次元に対して上からの評価はされている。(Goncharov, Goncharov-Deligne, Terasoma) 各 weight の次元でみた時、関係式の強弱をこの次元の大小ではかることができる。かなり高い weight のところまでの実験結果により、つぎの事実が予想される。

**Conjecture 1.2.** (1) *Associator relation* のみによって $A_n$ の次元は上から $d_n$ で評価される。

(2) *Regularized double shuffle relation* のみによって $A_n$ の次元は上から $d_n$ で評価される。

従って、ここで考えている relation は二つともすべての relation を与えていると予想されるが、ここでの結果を換言すれば、associator relation のみを考えさえすれば double shuffule relation から得られる新しい関係式は何もない、ということになる。

## 2. Drinfeld associator と Associator relation

多重ゼータ値の関係式を記述するのにその generating function ともいえる Drinfeld associator を使うのが有用であるので、その復習をしよう。$\mathcal{U}^{DR} = \mathbf{Q}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$ を $e_0 = Res_0$, $e_1 = Res_1$ で生成される非可換巾級数環とする。これには $e_0, e_1$ で生成される、augmentation ideal と呼ばれる、両側イデアル $I$ およびその巾による位相が入り、この位相に関して完備である。以下、完備化されたテンソル積を単に $\mathcal{U}^{DR}_{\mathbf{C}} = \mathcal{U}^{DR} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$ 書くことにする。ここで

$$\omega = e_0\frac{dt}{t} + e_1\frac{dt}{t-1}$$

を $\mathcal{U}^{DR}_{\mathbf{C}}$-valued の 1 form として、$\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ の 2 点 $p, q$ 及び $p, q$ を結ぶ path $\gamma$ に対して、iterated integral

$$\int_\gamma \overbrace{\omega\omega\cdots\omega}^{n-\text{times}} \tag{2.1}$$

を同様に定義する。ここで 1 form の値の積としては $\mathcal{U}^{DR}_{\mathbf{C}}$ の積を用いた (2.1) は $\mathcal{U}^{DR}_{\mathbf{C}}$ の $n$ 次の斉次の元となるので、

$$\exp(\int_\gamma \omega) = 1 + \int_\gamma \omega + \int_\gamma \omega\omega + \int_\gamma \omega\omega\omega + \cdots$$

は $\mathcal{U}^{DR}_{\mathbf{C}}$ の元として well defined である。またこれは path の合成に関して乗法的である。すなわち $p, q$ および $q, r$ を結ぶ path $\delta, \gamma$ に対して $\exp(\int_{\gamma\delta}\omega) = \exp(\int_\gamma \omega)\cdot\exp(\int_\delta \omega)$ となる。これは基点 $p, q$ が一致している場合には基本群の群環の準同型の言葉でいえる。一致していない場合にも一般的に考えたいので groupoid の記述法を導入することにする。群から群環を作ったのと同じ仕方で goupoid の $\mathbf{Q}$-線型結合をとると、環のようなものができる。ただし $a$ の始点と $b$ の終点が一致している時のみ、その積 $ab$ が定義できる。このような代数体系を algebroid とよぶ。すなわち、集合 $S$ 上の algebroid $\mathcal{U}$ とは $p, q \in S$

で index 付けされたベクトル空間 $\mathcal{U}_{p,q}$ の族とその上の結合法則、分配法則を満たす算法の族 $\mathcal{U}_{q,r} \times \mathcal{U}_{p,q} \to \mathcal{U}_{p,r}$ であって、次の条件を満たすものである。(1) 環 $\mathcal{U}_{p,p}$ は単位元をもつ。(2) $\mathcal{U}_{p,q}$ は環 $\mathcal{U}_{q,q}$ 上の左加群とみて rank 1 free module である。集合 $S_1, S_2$、写像 $f : S_1 \to S_2$ 及び $S_1, S_2$ 上の algebroid $\mathcal{U}_1$ $\mathcal{U}_2$ が与えられた時、$f$ 上の homomorphism $\varphi : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ とは linear map $\varphi_{p,q} : \mathcal{U}_{1,p,q} \to \mathcal{U}_{2,f(p),f(q)}$ の族で、$\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ のそれぞれの積構造と compatible となるものの事である。

空間 $X$ からその fundamental groupoid(二つの点 $p, q$ を結ぶ path の homotopy 類からできる groupoid) をとってそこからつくられた algebroid を $X$ の fundamental algebroid という。これには de Rham relaization と Hodge realization がある。そして、それらの algebroid は itereated integral を用いて比較することができる。$\mathbf{Q}[\pi_1(\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}, p, q)]$ およびその augmentation ideal による完備化 $\mathcal{U}^B = \mathbf{Q}[\pi_1(\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}, p, q)]\hat{}$ は集合 $\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ 上の algebroid となる。また $\mathcal{U}^B_{\mathbf{C}}$ をその $\mathbf{C}$ への完備化テンソル積とすると、

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}^B_{\mathbf{C}} & \to & \mathcal{U}^{DR}_{\mathbf{C}} \\ \gamma & \mapsto & \exp \int_\gamma \omega \end{array}$$

は algebroid の同型を引き起こす。

さて Drinfeld associator を特殊な path およびその極限をとるという操作により定義する。 $t, u$ を十分小さい実数として $t$ と $1-u$ を結ぶ path $[t, 1-u]$ を考える。

**Proposition 2.1.** 次の極限が存在する。

$$\Phi_{DR}(e_0, e_1) = \lim_{t,u\to 0} \exp(-\log u e_1) \cdot \exp \int_{[t,1-u]} \omega \cdot \exp(\log t e_0)$$

上の極限を Drinfeld associator という。Drinfeld associator における $e_0^{k_n-1}e_1e_0^{k_{n-1}-1}e_1 \ldots e_0^{k_1-1}e_1$ の係数は $\zeta(k_1, \ldots, k_n)$ で与えられることがわかる。また一般に $e_1$ 出始まるか、あるいは $e_0$ で終る word $\mathbf{w} = w_1w_2\ldots w_n$ についても $e_{w_1}e_{w_2}\cdots e_{w_n}$ の係数は weight が $n$ の多重ゼータ値で表されることが知られている。これは Drinfeld associator $\Phi_{DR}$ が group like であり、$\Phi_{DR}(e_1, 0) = 1$ であることから導かれる事実である。

この極限操作は、一般的な定義はここでは与えないが、tangential base point を使い定式化される。つまり 0, 1 に無限に近い base points $\overrightarrow{01}, \overrightarrow{10}$ が定まり、その点を結ぶ path の homotopy 類の集合を $Path_{\overrightarrow{01},\overrightarrow{10}} = Path(\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}, \overrightarrow{01}, \overrightarrow{10})$ とおくと、その $\mathbf{Q}$ 上の一次結合のある filtration による完備化を $\mathbf{Q}[[Path_{\overrightarrow{01},\overrightarrow{10}}]]$ と書くと、上の極限操作は $\mathbf{Q}[[Path_{\overrightarrow{01},\overrightarrow{10}}]]$ の $\mathbf{C}$ 上の完備化テンソル積から $\mathcal{U}^{DR}_{\mathbf{C}}$ への同型

$$\mathbf{Q}[[Path_{\overrightarrow{01},\overrightarrow{10}}]] \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \to \mathcal{U}^{DR}_{\mathbf{C}}$$

を導く。そしてこの同型における $[0,1]$ の像が Drinfeld associator である。

Drinfeld associator $\Phi_{DR}$ の満たす relation について述べよう。

(1) $\Phi_{DR}$ の定義と iterated integral の乗法性から

$$\Phi_{DR}(e_0, 0) = 1, \Phi_{DR}(e_1, e_0) = \Phi_{DR}(e_0, e_1)^{-1}$$

がわかる。

(2) iterated integral に関する shuffle relation を書き直せば、

$$\Delta(\Phi_{DR}(e_0,e_1))=\Phi_{DR}(e_1,e_0)\otimes\Phi_{DR}(e_1,e_0)$$

を得る。ここで $\Delta$ は $\Delta(e_i)=e_i\otimes 1+1\otimes e_i$ $(i=0,1)$ なる環準同型 $\mathcal{U}_{\mathbf{C}}^{DR}\to\mathcal{U}_{\mathbf{C}}^{DR}\otimes\mathcal{U}_{\mathbf{C}}^{DR}$ である。言い換えれば $\Phi_{DR}$ が group like element であるという事である。

(3) $\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}$ のなかの上半平面のみを通り $0,1,\infty$ の近くをまわる path が可縮であることから来る関係式。(これは 6 項関係式と呼ばれる。)

$$\Phi_{DR}(e_\infty,e_0)e^{\frac{1}{2}e_\infty}\Phi_{DR}(e_1,e_\infty)e^{\frac{1}{2}e_1}\Phi_{DR}(e_0,e_1)e^{\frac{1}{2}e_0}=1$$

(4) 5 項関係式と呼ばれる関係式。これを述べるためには rational curve 上の異なる 5 点の moduli space $\mathcal{M}_{0,5}$、その stable compactification である $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}$、 および $\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}$ を $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}$ の boundary の tubler neighbourhood へ埋め込むことを考察しなくてはならない。Boundary $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}-\mathcal{M}_{0,5}$ は 10 個の $\mathbf{P}^1$ と同型な irreducible component からなり、それぞれの component は 5 点を $p_1,\ldots,p_5$ としたとき、$p_i=p_j$ となる点の配置からなる。対応する component を $l_{ij}$ と書くことにする。いま $\mathcal{M}_{0,5}$ の $\mathbf{R}$-valued point $\mathcal{M}_{0,5}(\mathbf{R})$ のひとつの connected component $P$ をとると、$P$ の boundary は 5 つの boundary component に含まれる。この boundary component は $\{1,\ldots,5\}$ のひとつの cyclic ordering を定める。これに対して $\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}$ "infinitesimal" な埋め込みが 5 つ定まる。たとえば $l_{ij}$ が boundary component のひとつであるとすると、$\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}$ を $l_{ij}^0$ の tubler neibourhood に埋め込むことにより fundamental algebroid の準同型

$$\mathbf{Q}[[Path^B(l_{ij}^0)]]\to\mathbf{Q}[[Path^B(\mathcal{M}_{0,5})]]$$

が誘導される。de Rham fundamental algebroid についても infinitesimal inclusion が同様の準同型を誘導する。

$$\mathbf{Q}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle\to\mathcal{U}^{DR}(\mathcal{M}_{0.5})=\mathbf{Q}\langle\langle e_{ij}\rangle\rangle_{1\le i<j\le 5}$$

ここで $\mathcal{U}^{DR}(\mathcal{M}_{0,4})$ は $e_{ij}=e_{ji}$ $(1\le i<j\le 5)$ で生成される完備な非可換環で、それらの間の関係式は $[e_{ij}+e_{jk},e_{ik}]=0$ ($i,j,k$ は全て異なる) で与えられる。

この"infinitesimal inclusion" と comparizon map の compatibility からくる relation が 5 項関係式である。例えば cyclic ordering $(1,2,3,4,5)$ に対する relation は

$$\Phi_{DR}(e_{23},e_{12})\Phi_{DR}(e_{51},e_{45})\Phi_{DR}(e_{34},e_{23})\Phi_{DR}(e_{12},e_{51})\Phi_{DR}(e_{45},e_{34})=1$$

である。

**Definition 2.2.** *$\mathcal{U}_{\mathbf{C}}^{DR}$ の 1 で始まる元 $\Phi=\Phi(e_0,e_0)$ が (1)〜(4) の relation を満すとき、$\Phi$ を associator という。*

(1)〜(4) は $\Phi$ の係数に関する relation とみなせる。この relation を associator relation という。Associator を $\Phi=\sum_{\mathbf{w}=(w_1,\ldots,w_n)}c_{\mathbf{w}}e_{w_1}\cdots e_{w_n}$ と表すとき、一

般の $\mathbf{w}$ の係数 $c_{\mathbf{w}}$ は $e_0$ で始まり $e_1$ で終る word の係数の $\mathbf{Q}$-linear combination で書かれることが (1),(2) の関係式からわかる。

Associator の集合を algebroid の言葉で言い替えることができる。いま $\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}$, $\mathcal{M}_{0,5}$ の infinitesimal base point の集合を $|\,\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}\,|$, $|\,\mathcal{M}_{0,5}\,|$ とする。例えば、

$$|\,\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}\,|=\{\overrightarrow{10},\overrightarrow{01},\overrightarrow{1\infty},\overrightarrow{\infty 1},\overrightarrow{0\infty},\overrightarrow{\infty 0}\}$$

である。$*=DR,B$ として infinitesimal inclusion に対して

$$\mathcal{U}^*(l_{ij}^0)\to\mathcal{U}^*(\mathcal{M}_{0,5})$$

がそれぞれ定義される。

**Proposition 2.3.** *Associator を与えることと、二つの comparizon map と呼ばれる algebroid の同型*

$$c_4:\mathcal{U}_{\mathbf{C}}^B(\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\})\to\mathcal{U}_{\mathbf{C}}^{DR}(\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\})$$
$$c_5:\mathcal{U}_{\mathbf{C}}^B(\mathcal{M}_{0,5})\to\mathcal{U}_{\mathbf{C}}^{DR}(\mathcal{M}_{0,5})$$

*で以下の条件を満すものを与えることは同値である。*

(1) *$c_i$ は augmentation と compatible な Hopf algebra の同型である。*
(2) *infinitesimal base point の近くの local monodromy $e_i$ は compatible*
(3) *(de Rham, Betti のそれぞれに関する) infinitesimal inclusion に関して compatible*
(4) *$c_4$ の abel 化*

$$\mathcal{U}_{\mathbf{C}}^B(\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\})^{ab}\to\mathcal{U}_{\mathbf{C}}^{DR}(\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\})^{ab}$$

*で $[0,1]$ の像は 1 となる。*

Proposition 2.3 から、associator $\Phi$ が与えられると category

$$\begin{aligned}Vec_{\mathbf{Q}}\otimes_{Vec_{\mathbf{C}}}Vec_{\mathbf{Q}}=\{(V^B,V^{DR},comp)\mid\ & \\ & V^B,V^{DR}\text{ は }\mathbf{Q}\text{ 上のベクトル空間},\\ & comp:V^B\otimes\mathbf{C}\simeq V^{DR}\otimes\mathbf{C}\text{ は同型 }\}\end{aligned}$$

内の algebroid object $\mathcal{U}(\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\})$, $\mathcal{U}(\mathcal{M}_{0,5})$ および infinitesimal inclusion に対する algebroid 間の写像が定まることが結論される。

## 3. Regularized double shuffle relation

iterated integral に関する shuffle relation を用いると二つの多重ゼータ値の積が多重ゼータ値の $\mathbf{Q}$-linear combination に表されることを述べた。例えば、

$$\zeta(2)\zeta(2)=4\zeta(1,3)+2\zeta(2,2) \tag{3.1}$$

というような関係式がある。一方 $\zeta(2)$ の級数展開を使うと

$$\begin{aligned}\zeta(2)\cdot\zeta(2)&=\sum_n \frac{1}{n^2}\cdot\sum_m \frac{1}{m^2}\\&=2\sum_{n<m}\frac{1}{n^2m^2}+\sum_n\frac{1}{n^4}\\&=2\zeta(2,2)+\zeta(4)\end{aligned}\tag{3.2}$$

となり、等式 (3.1) と (3.2) より

$$4\zeta(1,3)=\zeta(4)\tag{3.3}$$

なる関係式が得られる。このタイプの関係式を double shuffle relation という。double shuffle relation により、たくさんの関係式が得られるが、このままでは予想される関係式の全てが得られるわけではない。double shuffle relation は $\zeta(1)$ のような発散級数に拡張することにより regularized double shuffle relation という関係式に拡張される。これまでの実験結果によると、regularized double shuffle relation は全ての relation を尽していると予想される。発散級数に拡張するのには次の Zagier, Boutet de Monvel の定理を使う。

**Proposition 3.1** (Zagier, Boutet de Monvel). 実数列 $\{a_i\}_{i=1,2,\ldots}$ から得られる二つの級数に対して、次の二つの近似式が満たされているとする。

(1) ある $\epsilon>0$ に対して、$\sum_{i=1}^N a_i=P(\log N+\gamma)+O(N^{-\epsilon})$ *for* $N\to\infty$ をみたす多項式 $P$ が存在する。
(2) ある $\epsilon>0$ に対して、$\sum_{i=1}^\infty a_ix^i=Q(-\log(1-x))+O((1-x)^\epsilon)$ *for* $x\to1$ をみたす多項式 $Q$ が存在する。

このとき上の性質を満す $P(T)$, $Q(t)$ は一意に定まり、$\rho(P(T))=Q(t)$ となる。ここで $\rho:\mathbf{R}[T]\to\mathbf{R}[t]$ は

$$\sum_{i=0}^\infty \frac{\rho(T^n)}{n!}u^n=e^{ut}e^{\gamma u}\Gamma(1+u)$$

によって定まる $\mathbf{R}$ 線型写像である。

**Remark 3.2.** *Proposition 3.1* に現れる巾級数 $e^{\gamma u}\Gamma(1+u)$ は

$$e^{\gamma u}\Gamma(1+u)=\exp(\sum_{i=2}(-1)^i\frac{\zeta(i)}{i}u^i)$$

となることから各係数が多重ゼータ値の $\mathbf{Q}$-係数の一次結合で表されている。

$k_1,k_2,\ldots,k_n$ を1以上の整数として $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_n)$ とする。数列 $\{a(\mathbf{k})_m\}_m$ を

$$a(\mathbf{k})_m=\sum_{a_1<a_2<\cdots<a_n=m}\frac{1}{a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}}$$

と定義すると、これに Proposition 3.1 が適応できることがわかる。ここで

$$\zeta_N(\mathbf{k})=\sum_{i=1}^N a(\mathbf{k})_i=\sum_{a_1<\cdots<a_n\le N}\frac{1}{a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n}}$$

と定義すると (3.2) の変形と同様にして

$$\zeta_N(\mathbf{k})\cdot\zeta_N(\mathbf{k}')=\sum_{\mathbf{k}''}c_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\mathbf{k}''}\zeta_N(\mathbf{k}'') \tag{3.4}$$

と書かれる。ここで $c_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\mathbf{k}''}$ は和をとるべき数の大小関係の組み合わせから得られる非負整数である。(はじめの例で言えば、$c_{2,2}^{4}=1, c_{2,2}^{(2,2)}=2$ である。) Proposition 3.1 によって $\zeta_N(\mathbf{k})$ は $\log N+\gamma$ の多項式 $P_{\mathbf{k}}(\log N+\gamma)$ で近似される。関係式 (3.4) から多項式 $P_{\mathbf{k}}(T)$ に対して

$$P_{\mathbf{k}}(T)\cdot P_{\mathbf{k}'}(T)=\sum_{\mathbf{k}''}c_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\mathbf{k}''}P_{\mathbf{k}''}(T)$$

なる関係式を得る。一方、同じ数列 $\{a(\mathbf{k})_i\}$ に対して (2) の近似関数を作ると

$$\sum_{i=1}^{\infty}a(\mathbf{k})_i x^i=\int_0^x \overbrace{\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt}{t}}^{k_n-1}\frac{dt}{1-t}\cdot\overbrace{\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt}{t}}^{k_{n-1}-1}\frac{dt}{1-t}$$
$$\cdots\overbrace{\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt}{t}}^{k_1-1}\frac{dt}{1-t}$$

となり、これを近似する関数 $Q_{\mathbf{k}}(-\log(1-x))$ は Drinfeld associator $\Phi$ を用いると $\exp(\log(1-x)e_1)\Phi(e_0,e_1)$ における $e_1^{k_n-1}e_0\cdots e_1^{k_1-1}e_0$ の係数の $(-1)^n$ 倍で与えられる。$P_{\mathbf{k}}(T)$ と $Q_{\mathbf{k}}(t)$ が Proposition 3.1 の対応で与えられる事から regularized double shuffle relation が与えられる。

この regularized double shuffle relation の Racinet による定式化を与える。Drinfeld associator $\Phi_{DR}$ を $\Phi_{DR}(e_0,e_1)=1+\varphi_1e_1+\varphi_0e_0$ と表し、$\Phi_{DR,Y}=1+\varphi_1e_1$ と定義する。このとき $y_i=-e_0^{i-1}e_1$ $(i=1,2,\dots)$ とおくと

$$\Phi_{DR,Y}\in\mathbf{Q}+\mathbf{C}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle e_1=\mathcal{W}=\mathbf{C}\langle\langle y_1,y_2,\dots\rangle\rangle$$

となる。

**Definition 3.3** (Harmonic coproduct). *Harmonic coproduct* $\Delta_*$ なる環準同型

$$\Delta_*:\mathcal{W}\to\mathcal{W}\otimes\mathcal{W}$$

を $\Delta(y_n)=\sum_{i=0}^n y_i\otimes y_{n-i}$ によって定義する。ここで $y_0=1$ と定義する。

**Proposition 3.4** (Racinet). $\Phi_{DR,Y}^{reg}=\Phi_{DR,Y}^{reg}(y_1,y_2,\dots)$ を

$$\Phi_{DR,Y}^{reg}=(e^{\gamma y_1}\Gamma(1+y_1))^{-1}\Phi_Y$$

で定義する。このとき

$$\Delta_*(\Phi_{DR,Y}^{reg})=\Phi_{DR,Y}^{reg}\otimes\Phi_{DR,Y}^{reg}$$

が成立する。

上の relation を harmonic shuffle relation という。この harmonic shuffle relation と iterated integral の shuffle relation をあわせるて得られる関係式が double shuffle relation である。

## 4. Main Theorem

これまで二つの多重ゼータ値に関する関係式を述べてきた。ひとつは associator relation でもうひとつは harmonic shuffle relation である。両方とも多重ゼータ値の generating function である Drinfeld associator $\Phi_{DR}$ に関する式としてあらわされる。この報告で述べたいことは勝手な associator $\Phi$ が harmonic shuffle relation を満す、ということである。ひとつ特筆すべき点は、harmonic shuffle relation には $\Gamma'(u)=e^{\gamma u}\Gamma(1+u)$ なる factor が現れる事である。この factor も与えられた associator $\Phi$ に準じておきかえなければならない。どうおきかえるべきか、という指針を与えるために、$\Gamma'(u)$ は Drinfeld associator からどう復元されるかを述べておこう。

(1) 前の section で定義した $\Phi_{DR,Y}$ を使うと、$\Phi_{DR,Y}$ の $\mathcal{U}_{\mathbf{C}}^{DR,ab}=\mathbf{C}[[e_0,e_1]]$ における image は $(\Gamma'(e_0)\cdot\Gamma'(e_1))/\Gamma'(e_0+e_1)$ となる。(これは beta 関数の類似物である。)

(2) $\Gamma'(u)$ は 1 から始まる巾級数で $e_1,e_0$ に関する 1 次の項の係数は 0 である。

(1), (2) をみたす関数として $\Gamma'(u)$ は unique に定まる。

一般に Associator

$$\Phi=1+\varphi_0e_0+\varphi_1e_1\in\mathbf{C}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$$

に対して、$\Phi_Y=1+\varphi_1e_1$ とおく。このとき前にも注意したように $\Phi_Y\in\mathbf{C}\langle\langle y_1,y_2,\ldots\rangle\rangle$ である。

**Theorem 4.1.** $\Phi_Y^{ab}$ を $\Phi_Y$ の $\mathcal{U}_{\mathbf{C}}^{DR,ab}=\mathbf{C}[[e_0,e_1]]$ における像とする。このとき次の二つが成り立つ様な $\Gamma'_\Phi(u)$ が *unique* に存在する。

(1)

$$\Phi_Y^{ab}=\frac{\Gamma'_\Phi(e_0)\cdot\Gamma'_\Phi(e_1)}{\Gamma'_\Phi(e_0+e_1)}$$

(2)

$$\Gamma'_\Phi(u)\equiv 1\ mod\ I^2$$

実はこの定理は motivic な意味で証明できる。Galois version に関する同様の定理は伊原康隆氏によっても得られていることを注意しておく。

**Theorem 4.2** (Main Theorem). $\Gamma'_\Phi(u)$ を *Theorem 4.1* で与えられた巾級数とする。$\Phi_Y^{reg}=\Gamma'_\Phi(y_1)^{-1}\Phi_Y$ とおくと、

$$\Delta_*(\Phi_Y^{reg})=\Phi_Y^{reg}\otimes\Phi_Y^{reg}$$

が成り立つ。

この定理によれば、associator は harmonic shuffle relation をみたす、というわけで、group like element であることが associator の条件の一部であることを考えれば、double shuffle relation をみたす、ということになる。一例を上げれば、任意の associator $\Phi$ に対して

$$\Phi(e_0,e_1)=\cdots+c_{0001}e_0^3e_1+\cdots+c_{0011}e_0^2e_1^2+\cdots$$

とすると、$4c_{0011}=c_{0001}$ などの式が成り立つということである。(Drinfeld associator の場合は $c_{0011}=\zeta(1,3),c_{0001}=\zeta(4)$ であったことと、(3.3) を比較せよ。)

## 5. 定理の証明

Associator が与えられると $\mathcal{M} = Vec_{\mathbf{Q}} \times_{Vec_{\mathbf{C}}} Vec_{\mathbf{Q}}$ における algebroid objects $\mathcal{U}(\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}), \mathcal{U}(\mathcal{M}_{0,5})$ および inifinitesimal inclusion から誘導される algebroid の homomorphisms が定義できた。$\mathcal{M}$ は abel 圏であるのみならず tensor 積、innter homomorphism などが定義されている Tannaka 圏をなしている。とくにその fiber functor として、$(V^B, V^{DR}, comp)$ に対して $V^B$ $(V^{DR})$ を対応させるもの、すなわち Betti (de Rham) realization がある。これらをもとに、algebroid 上の加群、すなわち $\mathcal{M}$ の $\mathcal{U}(\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\})$-module object の概念が定義される。さらに、algebroid object の homomorphism $\mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ および $\mathcal{U}_1$-module $\mathcal{F}$ に対して higher direct image に対応する、 algebroid の relative cohomology が定義される。これらは単に群の cohomology を $\mathcal{M}$ の中で書換えたものである。さらに少し微妙な点を含んでいるが、定義されるものとして、constructible sheaf, perverse sheaf, vanishing cycle がある。これらの概念を組合せて multiplicative convolution が定義される。category $\mathcal{M}$ の中で構成しなくてはならない、という点を除いてはすべておなじみの functor なので、これらの操作は出来ているものと仮定して、multiplicative convolution を定義しよう。

方針を述べよう。まずこれは abel 圏の二つの object $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ にたいして bilinear な functor $\mathcal{M}_1 * \mathcal{M}_2$、および coproduct が現れるような fiber functor が欲しい。そこで、Zagier,Boutet de Movel の定理から想像される様に、Fourier transform 使うとよさそうだが、tensor 積と交換するようにするためには vanishing cycle をとる操作を考える。さらにこれが fiber functor として well defined となるようにするために、perverse sheaf の category をすこし modify することを考える。これらの構成法を $\mathcal{M}_{0,5}$ と $\mathcal{M}_{0,4} = \mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ の geometry のみを使って構成する事を考える。

**Observation 5.1.** $\Delta = \{z \mid \ \mid z \mid < 1\}$ を単位円板、$\Delta^* = \Delta - \{0\}$ とする。$\Delta$ 上の *perverse sheaf* で $\Delta^*$ 上 *smooth* なもののなす *category* は次のような *data* からなる *4* つ組 $(V, W, \alpha, \beta)$ のなす *category* と *equivalent* である。

(1) $V$ は $\pi_1(\Delta^*)$ が作用する $\mathbf{Q}$-*vector space.*
(2) $W$ は $\mathbf{Q}$-*vector space*
(3) $\alpha : V \to W$, $\beta : W \to V(1)$ はそれぞれ $\mathbf{Q}$-*linear map* で $\beta \circ \alpha$ は $e = \log(\rho)$ の作用と一致している。

この圏同値は *perverse sheaf* $\mathcal{F}$ に対して $(\psi(\mathcal{F}), \phi(\mathcal{F}), nat, var)$ を対応させることにより得られる。 ここで $\psi(\mathcal{F}), \phi(\mathcal{F})$ はそれぞれ $\mathcal{F}$ の *near by cycle, vanishing cycle* で次の三角形図式から定義される。

$$\begin{tikzcd} i^*(\mathcal{F}) \arrow[rr] & & \mathbf{R}i^*\bar{j}_*\bar{j}^*(\mathcal{F}) = \psi(\mathcal{F}) \arrow[dl] \\ & \phi(\mathcal{F}) \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

ここで $\bar{j}$ は *universal covering* $\tilde{\Delta^*} \to \Delta^*$ と *open embedding* $\Delta^* \to \Delta$ の合成である。*nat* や *var* も自然に定義される。

さて $\mathcal{A}$ を $\mathbf{G}_m = \mathbf{C}^\times$ 上の perverse sheaf で 1 を除いて smooth であり $\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ への制限が unipotent monodory をもつ local system となるもののなす category とする。$\mathcal{F} \in \mathcal{S}$ に対して、$\phi_1(\mathcal{F})$ で $\mathcal{F}$ の 1 での vanishing cycle を

表す。$\mathcal{A}$ に equivalence を入れ、quotient category $\overline{\mathcal{A}}$ を構成する。$\mathcal{A}$ の二つの object $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ が与えられたとき、その間の射 $f : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ が equivalent であることを $f$ が induce する写像 $\phi(f) : \phi(\mathcal{F}_1) \to \phi(\mathcal{F}_2)$ が同型となることにより定義する。この equivalence relation による quotient category を $\overline{\mathcal{A}}$ と書く。

**Proposition 5.2.** $\mathcal{W}$ を

$$\mathcal{W} = \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q}[[\pi_1(\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}, \overrightarrow{10})]]e_1$$

によって定義する。このとき *category* $\overline{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{W}$*-module* の圏と同値である。

この圏同値は次の様にして与えられる。まず $\mathcal{A}$ は次の 4 つ組 $(V, W, \alpha, \beta)$ の圏と同値である。

(1) $V$ は $\mathbf{Q}[[\pi_1(\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\})]]$-module.
(2) $W$ は $\mathbf{Q}$-vector space.
(3) $\alpha : V \to W$, $\beta : W \to V(1)$ は $\mathbf{Q}$-linear map で $\beta \circ \alpha$ は $e_1$ の action と一致する。

$\mathcal{A}$ の object $\mathcal{F} = (V, W, \alpha, \beta)$ に対して $\mathcal{W}$-module $\tilde{F}(\mathcal{F})$ を次の様に定義する。まず underliying vector space としては $W$ をとる。その上の $\mathcal{W}$-action を $w \in W$, $k + ue_1 \in \mathcal{W}$ に対して

$$(k + ue_1)(w) = kw + (\alpha \circ u \circ \beta(w))$$

と定義する。定義により functor $\tilde{F} : \mathcal{A} \to (\mathcal{W} - \mathrm{alg})$ は $F : \overline{\mathcal{A}} \to (\mathcal{W} - \mathrm{alg})$ なる functor を引き起こす。そして、実際 $F$ が圏同値であることが確かめられる。

さて multiplicative convolution を定義しよう。rational curve の 5 点 $p_1, \ldots, p_5$ のうち $p_i$ を忘れることにより $pr_i : \overline{\mathcal{M}_{0,5}} \to \mathbf{P}^1$ なる projection が得られる。$l_{34}$ は 3 つの projection $pr_1, pr_2, pr_5$ の fiber に含まれる。$\overline{\mathcal{M}_{0,5,34}}$ を $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}$ を $l_{34}$ で blow down したものとすると $pr_1, pr_2, pr_5$ は $\overline{\mathcal{M}_{0,5,34}} \to \mathbf{P}^1$ なる写像を引き起こす。$\mathcal{M}^*_{0,4} = \mathbf{G}_m$ と定義し、

$$\mathcal{M}^*_{0,5} = pr_1^{-1}(\mathbf{G}_m) \cap pr_2^{-1}(\mathbf{G}_m) \cap pr_5^{-1}(\mathbf{G}_m)$$

と定義すると次の diagram が得られる。

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}^*_{0,4} & \overset{pr_1}{\leftarrow} & \mathcal{M}^*_{0,5} & \overset{pr_2}{\rightarrow} & \mathcal{M}^*_{0,4} \\ & & {\scriptstyle pr_5}\downarrow & & \\ & & \mathcal{M}^*_{0,4} & & \end{array}$$

$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ を $\mathcal{A}$ の object として $\mathcal{A}$ の object$\mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2$ を

$$\mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2 =^p \mathcal{H}^0(\mathbf{R}pr_{5*}(pr_1^*\mathcal{F}_1 \otimes pr_2^*\mathcal{F}_2))$$

によって定義する。これを $\mathcal{F}_1$ と $\mathcal{F}_2$ の multiplicative convolution という。

**Proposition 5.3.** $\mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2$ の $\overline{\mathcal{A}}$ での類は $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ の $\overline{\mathcal{A}}$ での類のみによる。したがって *multiplicative convolution* は $\overline{\mathcal{A}} \times \overline{\mathcal{A}} \to \overline{\mathcal{A}}$ なる *bilinear* な *functor* $*$ を定める。これも *multiplicative convolution* という。

ここまでの定義がきちんとされていると $\mathcal{F}_1 = (V_1, W_1, \alpha_1, \beta_1), \mathcal{F}_2 = (V_2, W_2, \alpha_2, \beta_2)$ の multiplicative convolution が (category $\mathcal{M}$ のなかで) 計算される。$\mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2 = (V_3, W_3, \alpha_3, \beta_3)$ と書くと、

$$W_3 = \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{Q}[e_1 \otimes 1, 1 \otimes e_1]} (W_1 \otimes W_2)$$

となることが計算からわかる。ここで $\mathbf{B}$ は $\mathbf{Q}[e_1 \otimes 1, 1 \otimes e_1]$ 上 rank 1 の module となる。category $\mathcal{M}$ 内でも $\mathbf{B}$ は計算する事ができ、その comparizon map には $\Phi_Y^{ab}$ が出てくる。(これは Drinfeld associator の場合は本質的に Beta 関数である。) $W_3$ への $\mathcal{W}$ の action をもとの $W_1, W_2$ への $\mathcal{W}$ の action で書く事を de Rham realization で行うと、harmonic coproduct を与えていることがわかる。最後に harmonic shuffle relation を証明するために、これらをもとに $\mathcal{M}$ 内に幾つかの object、幾つかの morphism を構成する。そして、それらの comparizon map を比較することにより、Main Theorem を得る。